ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Καθηγητής: Γεώργιος Καρακώστας

στο μάθημα
ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 1
Ἰωάννινα, 21-09-2016

1. [10] Δίνονται δύο μιγαδικοί αριθμοί a και b, με $b \neq 0$. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὸ σύνολο $\{z : Im[\frac{z-a}{b}] > 0\}$ εἶναι κυρτὸ καὶ ἀνοικτό.

2. [10] Δίνεται ἕνα ἀνοικτὸ ὑποσύνολο U τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καὶ γ μιὰ κατὰ τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη. Ἄν $f(z,\zeta), (z,\zeta) \in \gamma \times U$ εἶναι μιὰ συνεχὴς μιγαδικὴ συνάρτηση, τότε ἡ συνάρτηση $F(\zeta) := \int_\gamma f(z,\zeta)dz$ εἶναι συνεχὴς στὸ σύνολο U.

3. [10] Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἡ συνάρτηση μὲ τύπο
$$f(z) := \frac{\bar{z}^2}{z}, z \neq 0, \ f(0) := 0,$$
παρ' ὅλο πού στὸ σημεῖο 0 ἱκανοποιεῖ τὶς συνθῆκες Cauchy-Riemann, δὲν εἶναι παραγωγίσιμη στὸ 0.

4. [15] Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ὁ δείκτης στροφῆς $I(\gamma, z)$ μιᾶς κλειστῆς καμπύλης γ ὡς πρὸς ἕνα σημεῖο z μὴ κείμενο ἐπὶ τῆς γ, εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

5. [15] Νὰ ἀναπτύξετε σὲ σειρὰ Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο $z_0 = -1$ τὴ συνάρτηση μὲ τύπο
$$f(z) := \frac{1}{z(z+2)(z+3)}.$$

6. [15] Ὑποθέτουμε ὅτι $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu z^\nu$ εἶναι μιὰ δυναμοσειρὰ μὲ ἀκτίνα σύγκλισης $r > 0$. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἡ σειρὰ αὐτὴ παραγωγίζεται σὲ κάθε $z \in B(0,r)$ καὶ μάλιστα ἔχει παράγωγο τὴ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu a_\nu z^{\nu-1}$.

7. [10] Έστω f μια ακεραία συνάρτηση, ν ένας φυσικός αριθμός και $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta > 0$ ισχύει
$$\frac{\int_0^{2\pi} e^{-i\nu t} f(z + \alpha e^{it})dt}{\int_0^{2\pi} e^{-i\nu t} f(z + \beta e^{it})dt} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu.$$

8. [15] Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{(4+9x^2)^2}.$$